

1 の解答欄

(問1) C: $y = x^2 + 2x + 1$ Q: $y = (2n+3)x$

CとQの方程式より $x^2 + 2x + 1 = (2n+3)x$

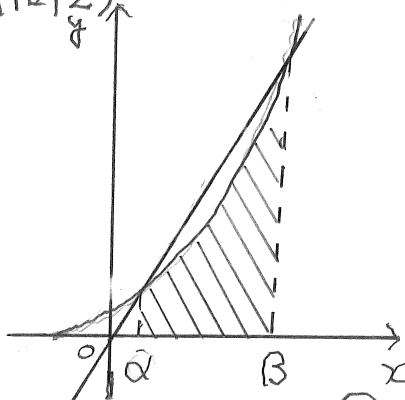
$x^2 - (2n+1)x + 1 = 0$ --- ①

判別式をDとして $D = \{-(2n+1)\}^2 - 4 = (2n+3)(2n-1)$

nは正の整数であるから $(2n+3)(2n-1) > 0$

よってCとQの共有点の個数は2個である。

(問2)



$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= \frac{\beta^3}{3} + \beta^2 + \beta - \left(\frac{\alpha^3}{3} + \alpha^2 + \alpha \right)$$

$$= \frac{1}{3} (\beta - \alpha)(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + (\beta - \alpha)(\beta + \alpha) + \beta - \alpha$$

ゆえに $\frac{S}{\beta - \alpha} = \frac{1}{3} (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + \alpha + \beta + 1$

$$= \frac{1}{3} \{ (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta \} + \alpha + \beta + 1$$

①の解と係数の関係より $\alpha + \beta = 2n + 1, \alpha\beta = 1$

よって $\frac{S}{\beta - \alpha} = \frac{1}{3} \{ (2n+1)^2 - 1 \} + 2n + 1 + 1$

$$= \frac{1}{3} (4n^2 + 10n + 6) = \frac{2}{3} (2n^2 + 5n + 3) \text{ --- (答)}$$

(問3)

$$\sum_{n=1}^m a_n = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^m (2n^2 + 5n + 3)$$

$$= \frac{2}{3} \times \left\{ 2 \times \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + 5 \times \frac{m(m+1)}{2} + 3m \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{m}{6} \{ 2(m+1)(2m+1) + 15(m+1) + 18 \}$$

$$= \frac{m}{9} \{ 2(2m^2 + 3m + 1) + 15m + 15 + 18 \}$$

$$= \frac{1}{9} m (4m^2 + 21m + 35) \text{ --- (答)}$$

2 の解答欄

(問1)

点Pが6秒後に点(2,4)にあり、

その1秒後に点(3,4)へ動く場合で

あるから

$$a_7 = \frac{6!}{2!4!} \times 1 = \underline{15} \quad \dots (\text{答})$$

(問2)

点Pが(k-1)秒後に

点(m-1, k-1-(m-1)) = (m-1, k-m)

にあり、その1秒後に点(m, k-m)へ

動く場合であるから

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(k-1)!}{(m-1)!(k-m)!} \times 1 \\ &= \frac{(k-1)!}{(m-1)! \{(k-1)-(m-1)\}!} \\ &= \underline{{}_{k-1}C_{m-1}} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(問3)

$${}_{k-1}C_{m-1} = {}_kC_m - {}_{k-1}C_m$$

であるから

$$\sum_{k=m}^{m+n} a_k = \sum_{k=m}^{m+n} ({}_kC_m - {}_{k-1}C_m)$$

$$= ({}_mC_m - {}_{m-1}C_m) +$$

$$({}_{m+1}C_m - {}_mC_m) +$$

$$({}_{m+2}C_m - {}_{m+1}C_m) +$$

⋮

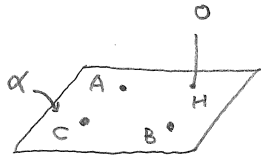
$$({}_{m+n-1}C_m - {}_{m+n-2}C_m) +$$

$$({}_{m+n}C_m - {}_{m+n-1}C_m)$$

$$= {}_{m+n}C_m \quad (\text{証明終})$$

(ただし、 ${}_{m-1}C_m = 0$ と解釈した)

3 の解答欄



(問1)

H(x, y, z) とする.

OH = 3 より $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{--- ①}$$

$\vec{OH} \cdot \vec{AH} = 0$ より

$$x^2 + x + y^2 - 3y + z^2 - z = 0 \quad \text{--- ②}$$

$\vec{OH} \cdot \vec{BH} = 0$ より

$$x^2 - x + y^2 - 5y + z^2 = 0 \quad \text{--- ③}$$

①, ②, ③ と x, y, z が整数である

ことより $x = -1, y = 2, z = 2$

よって H(-1, 2, 2) ... (答)

(問2)

C(u, 0, 0) とすると, 実数 s, t を用いて

$\vec{HC} = s\vec{HA} + t\vec{HB}$ となる. 成分で表

すと

$$(u+1, -2, -2) = s(0, 1, -1) + t(2, 3, -2)$$

$$= (2t, s+3t, -s-2t)$$

よって

$$\begin{cases} u+1 = 2t \\ -2 = s+3t \\ -2 = -s-2t \end{cases}$$

解いて $u = -9, s = 10, t = -4$

よって, C(-9, 0, 0) ... (答)

(問3)

$$|\vec{CA}| = |(8, 3, 1)| = \sqrt{74}$$

$$|\vec{CB}| = |(10, 5, 0)| = \sqrt{125}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 80 + 15 + 0 = 95$$

△ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{74})^2 \cdot (\sqrt{125})^2 - 95^2}$$

$$= \frac{15}{2} \dots \text{(答)}$$

(問4)

四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \times \Delta ABC \times OH$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times 3$$

$$= \frac{15}{2} \dots \text{(答)}$$

4 の解答欄

(問1) $C: y = |(x-a)(x-1)|$

(i) $x \leq a, 1 \leq x$ のとき

$$(x-a)(x-1) = x-a$$

$$(x-a)(x-2) = 0 \quad \therefore x = a, 2$$

(ii) $a < x < 1$ のとき

$$-(x-a)(x-1) = x-a$$

$$-x(x-a) = 0$$

$$\begin{cases} a \leq 0 \text{ のとき } x = 0 \\ a > 0 \text{ のとき 解なし} \end{cases}$$

以上より、

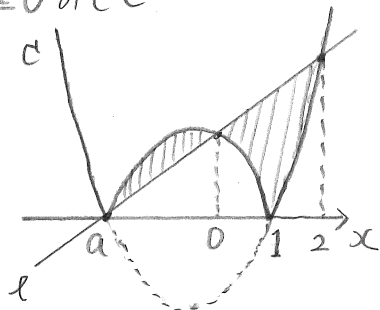
$$a \leq 0 \text{ のとき, } x = a, 0, 2$$

$$0 < a \leq 1 \text{ のとき, } x = a, 2$$

... (答)

(問2)

(i) $a \leq 0$ のとき



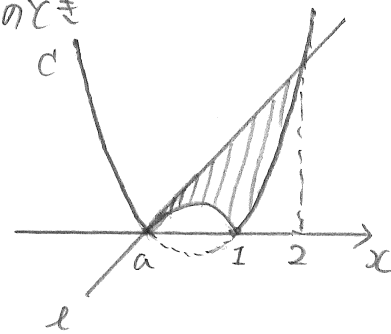
$$S(a) = \frac{1}{6}(2-a)^3 - 2 \times \frac{1}{6}(1-a)^3 + 2 \times \frac{1}{6}(0-a)^3$$

$$= \frac{1}{6}(8-12a+6a^2-a^3)$$

$$- \frac{1}{3}(1-3a+3a^2-a^3) - \frac{1}{3}a^3$$

$$= \frac{1}{6}(-a^3-6a+6) \quad \dots (答)$$

(ii) $0 < a \leq 1$ のとき



$$S'(a) = \frac{1}{6}(2-a)^3 - 2 \times \frac{1}{6}(1-a)^3$$

$$= \frac{1}{6}(8-12a+6a^2-a^3) - \frac{1}{3}(1-3a+3a^2-a^3)$$

$$= \frac{1}{6}(a^3-6a+6) \quad \dots (答)$$

(問3)

(i) $a \leq 0$ のとき

$$S'(a) = -\frac{1}{2}a^2 - 1 < 0$$

(ii) $0 < a \leq 1$ のとき

$$S'(a) = \frac{1}{2}a^2 - 1 < 0$$

よって、 $S(a)$ は $a \leq 1$ において単調に減少し、

$a=1$ のとき最小値 $S(1) = \frac{1}{6}$... (答) をとる。